Toader 平均与椭圆周长近似公式

参赛队员：许一格　詹泽城　潘宣霖
指导老师：杨志明
参赛学校：广东广雅中学
省份：广东省

目　　录

摘要……………………………………………………………………………………3

1、引言…………………………………………………………………………………5

2、引理…………………………………………………………………………………7

3、主要结论与研究过程……………………………………………………………10

4、椭圆周长近似公式的应用………………………………………………………19

5、课题研究展望……………………………………………………………………20

6、参考文献…………………………………………………………………………20

摘要

Toader 平均与椭圆周长有着相当密切的联系，但是数学家已经证明了 Toader 平均不能被初等函数所表示，只能用初等函数来逼求上下界. 为研究 Toader 平均的近似值，本文从椭圆周长公式入手，引入a、b的平方平均、算术平均、几何平均、调和平均，以及椭圆离心率k这五个变量，然后用泰勒公式展开求得 4 个平均和椭圆周长L中k各次方项系数的值，并作进一步比较，据此推导椭圆周长的上、下界，确定它的近似公式，从而推导 Toader 平均的近似值，进而得到一系列关于 Toader 平均的不等式和椭圆周长不等式.

创新之处：利用幂级数展开和二分法寻找 Toader 平均的最佳上、下界.

闪光之处：利用 Toader 平均与椭圆周长之间的关系得到了求椭圆周长的较好的近似公式.

关键词：Toader 平均、椭圆周长近似公式、平均值不等式、泰勒公式、项明达公式

The Toader mean and the approximate formula of the elliptical circumference

Abstract

Toader mean is closely related to the circumference of oval, but it has been proved by the mathematicians that Toader mean can only be approached by but not be expressed by elementary functions. In order to study the approximation of Toader mean, this article start from the formula of elliptical circumference, introducing five variables: square mean, arithmetic mean, geometric mean, harmonic mean and the elliptical eccentricity, k，then use Taylor formula to unfold them, obtaining their values of the k-th power item's coefficient. Depending on the further comparison, it can deduce the upper bound and the lower bound of ellipse and determine its approximate formula, so that obtain a serious of inequalities about the Toader mean and about the elliptical circumference.

Innovations: Use the expansion of the power series and dichotomy to discover the best upper bound and lower bound of Toader mean.

Shines: By the relationship of Toader mean and the elliptical circumference, obtain an approximate formula of the elliptical circumference with great accuracy.

Key words: Toader mean, approximate formula of ellipse, mean inequality, Taylor formula, Xiang Mingda formula

1. 引言

对任意的$r\in[0,1]$，本文总记：$r^{'}=\sqrt{1-r^2}$

对实参数$a,b,c(c\neq 0,-1,-2,\cdots)$, Gauss 超几何函数定义为[1]：

$$F(a,b;c;x)={}_2F_1(a,b;c;x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a)_n(b)_n}{(c)_n n!}x^n, x\in(-1,1),$$

其中，$(a)_0=1(a\neq 0)$，

而当$n=1,2,\cdots$时，$(a)_n=a(a+1)(a+2)\cdots(a+n-1),(a\neq 0)$．特别地，

$$\varepsilon(r)=\frac{\pi}{2}F(-\frac{1}{2},\frac{1}{2};1;r^2)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-r^2\sin^2 x)^{\frac{1}{2}}dx, \varepsilon^{'}(r)=\varepsilon(r^{'})$$

$(0\leq r<1)$ 称为第二类完全椭圆积分.

作者在文[2]中介绍了 Toader **平均**：

$$T(a,b)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{a^2\cos^2\theta+b^2\sin^2\theta}\,d\theta=\begin{cases}\frac{2a}{\pi}\varepsilon(\sqrt{1-(\frac{b}{a})^2}), a>b,\\ \frac{2b}{\pi}\varepsilon(\sqrt{1-(\frac{b}{a})^2}), a<b,\\ a, \qquad a=b.\end{cases} \tag{1}$$

其中，$\varepsilon=\varepsilon(r)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-r^2\sin^2\theta}\,d\theta, r\in[0,1]$.

文[3]中介绍了 Hölder **平均**：

$$M_p(a,b)=\begin{cases}\left(\frac{a^p+b^p}{2}\right)^{\frac{1}{p}}, p\neq 0\\ \sqrt{ab}, \qquad p=0\end{cases} \tag{2}$$

特别地，当$p=3,2,1,0,-1$时分别得到：

立方根平均：$M_3(a,b)=\sqrt[3]{\frac{a^3+b^3}{2}}$，

平方根平均：$S(a,b)=\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$，

算术平均：$A(a,b)=\frac{a+b}{2}$，

几何平均：$G(a,b)=\sqrt{ab}$ ，

调和平均：$H(a,b)=\frac{2ab}{a+b}$，

此外，还有

形心平均：$\overline{C}(a,b)=\frac{2(a^2+ab+b^2)}{3(a+b)}$，

反调和平均：$C(a,b)=\frac{a^2+b^2}{a+b}$，

2013年，在文[4]中，作者找到了下列双边不等式

$$\alpha_1\overline{C}(a,b)+(1-\alpha_1)A(a,b)<T(a,b)<\beta_1\overline{C}(a,b)+(1-\beta_1)A(a,b). \tag{3}$$

成立的充要条件是$\alpha_1 \le \frac{3}{4}$, $\beta_1 \ge \frac{12}{\pi} - 3$.

$$\frac{\alpha_2}{A(a,b)} + \frac{(1-\alpha_2)}{\overline{C}(a,b)} < T(a,b) < \frac{\beta_2}{A(a,b)} + \frac{(1-\beta_2)}{\overline{C}(a,b)}. \quad (4)$$

成立的充要条件是$\alpha_2 \le \pi\text{-}3$, $\beta_2 \ge \frac{1}{4}$.

（3）取$\alpha_1 = \frac{3}{4}$，$\beta_1 = \frac{12}{\pi} - 3$，得最佳不等式：

$$\frac{5a^2 + 6ab + 5b^2}{8(a+b)} < T(a,b) < \frac{2}{\pi} \cdot \frac{\pi ab + (a-b)^2}{a+b}. \quad (5)$$

（4）取$\alpha_2 = \pi\text{-}3$， $\beta_2 = \frac{1}{4}$，得最佳不等式：

$$\frac{\pi a^2 + 2(6-\pi)ab + \pi b^2}{2(a+b)(a^2+ab+b^2)} < \frac{1}{T(a,b)} < \frac{13a^2 + 22ab + 13b^2}{8(a+b)(a^2+ab+b^2)} \quad (6)$$

$$\Leftrightarrow \frac{8(a+b)(a^2+ab+b^2)}{13a^2 + 22ab + 13b^2} < T(a,b) < \frac{2(a+b)(a^2+ab+b^2)}{\pi a^2 + 2(6-\pi)ab + \pi b^2}. \quad (7)$$

栗文辉在文[5]，得到了（3）式的4个等价结论：

双边不等式

$$\alpha M_{CH}(a,b) + H(a,b) < T(a,b) < \beta M_{CH}(a,b) + H(a,b) \quad (8)$$

成立当且仅当$\alpha \le \frac{5}{8}$, $\beta \ge \frac{2}{\pi}$.

双边不等式

$$\alpha_1 M_{CH}(a,b) + A(a,b) < T(a,b) < \beta_1 M_{CH}(a,b) + A(a,b) \quad (9)$$

成立当且仅当$\alpha_1 \le \frac{1}{8}$, $\beta_1 \ge \frac{2}{\pi} - \frac{1}{2}$.

双边不等式

$$\alpha_2 M_{CH}(a,b) + C(a,b) < T(a,b) < \beta_2 M_{CH}(a,b) + C(a,b) \quad (10)$$

成立当且仅当$\alpha_2 \le -\frac{3}{8}$, $\beta_2 \ge \frac{2}{\pi} - 1$.

双边不等式

$$\alpha_3 M_{CH}(a,b) + \overline{C}(a,b) < T(a,b) < \beta_3 M_{CH}(a,b) + \overline{C}(a,b) \quad (11)$$

成立当且仅当$\alpha_3 \le -\frac{1}{24}$, $\beta_3 \ge \frac{2}{\pi} - \frac{2}{3}$.

我们的主要结果有

定理 1 各种平均定义如上，则

$$\frac{1}{2048}[2883A(a,b) - 579H(a,b) - 61G(a,b) - 195S(a,b)] \le T(a,b)$$

$$\le \frac{1}{32}[43A(a,b) - 7H(a,b) - 3G(a,b) - S(a,b)] \quad (12)$$

（12）式的下界比（5）式的下界强，上界则不分强弱.

由椭圆图形的对称性与 Toader 平均的定义可知，椭圆$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1(a > b > 0)$的周长$L$满足

$$L=\int_0^{2\pi}\sqrt{a^2\cos^2\theta+b^2\sin^2\theta}\,d\theta=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{a^2\cos^2\theta+b^2\sin^2\theta}\,d\theta$$

$=2\pi\cdot\dfrac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{a^2\cos^2\theta+b^2\sin^2\theta}\,d\theta=2\pi T(a,b)$. 由此可得

定理 2 椭圆周长 L 有如下近似公式

$$\frac{\pi}{1024}[2883A(a,b)-579H(a,b)-61G(a,b)-195S(a,b)]$$
$$<(\approx)L<(\approx)\frac{\pi}{16}[43A(a,b)-7H(a,b)-3G(a,b)-S(a,b)] \quad (13)$$

2. 引理

为了证明定理 1、2，先给出如下几个引理.

引理 1. 若 $a\ge b\ge 0, r=\dfrac{b}{a}\in[0,1]$，则

$$T(a,b)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{a^2\cos^2\theta+b^2\sin^2\theta}\,d\theta=\frac{2a}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-r^2\sin^2\theta}\,d\theta$$
$$=a\{1-\sum_{n=1}^{\infty}[\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}]^2\frac{r^{2n}}{2n-1}\}$$
$$=a(1-\frac{1}{2^2}r^2-\frac{3}{2^6}r^4-\frac{5}{2^8}r^6-\frac{175}{2^{14}}r^8-\frac{441}{2^{16}}r^{10}-\frac{4851}{2^{20}}r^{12}-\frac{14157}{2^{22}}r^{14}-\frac{2760615}{2^{30}}r^{16}-\cdots) \quad (14)$$

证明： 利用级数公式

$$\sqrt{1+x}=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\frac{1}{2}\cdot(\frac{1}{2}-1)\cdot\cdots\cdot(\frac{1}{2}-n+1)}{n!}x^n=1+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}x^n(-1<x<1),$$

及 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2n}t\,dt=\dfrac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\cdot\dfrac{\pi}{2}$，借助逐项积分法可求出 $T(a,b)$ 的无穷级数表达式：

$$T(a,b)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{a^2\cos^2\theta+b^2\sin^2\theta}\,d\theta$$
$$=\frac{2a}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-r^2\sin^2\theta}\,d\theta, r\in[0,1]$$
$$=\frac{2a}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}[1+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}(-r^2\sin^2t)^n]dt$$
$$=\frac{2a}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}[1-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}r^{2n}\sin^{2n}t]dt$$
$$=a\{1-\sum_{n=1}^{\infty}[\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}]^2\frac{r^{2n}}{2n-1}\}$$
$$=a(1-\frac{1}{2^2}r^2-\frac{3}{2^6}r^4-\frac{5}{2^8}r^6-\frac{175}{2^{14}}r^8-\frac{441}{2^{16}}r^{10}-\frac{4851}{2^{20}}r^{12}-\frac{14157}{2^{22}}r^{14}-\frac{2760615}{2^{30}}r^{16}-\cdots).$$

引理 2. 若椭圆的标准方程是：$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1, a\ge b>0$，$L$ 为椭圆的周长，则有

$$L=4a\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-e^2\sin^2 t}dt=2\pi a\{1-\sum_{n=1}^{\infty}[\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}]^2\frac{e^{2n}}{2n-1}\}$$
$$=2\pi a(1-\frac{1}{2^2}e^2-\frac{3}{2^6}e^4-\frac{5}{2^8}e^6-\frac{175}{2^{14}}e^8-\frac{441}{2^{16}}e^{10}-\frac{4851}{2^{20}}e^{12}-\frac{14157}{2^{22}}e^{14}-\frac{2760615}{2^{30}}e^{16}$$
$$-\frac{8690825}{2^{32}}e^{18}-\frac{112285459}{2^{36}}e^{20}-\cdots) \quad (15)$$

证明：椭圆的参数方程是$x=a\cos\theta, y=b\sin\theta,(0\le\theta\le 2\pi)$.

若某条光滑曲线，能用参数方程表示：$x=X(t),y=Y(t)$，$\alpha\le t\le\beta$,该曲线长度可表示为：$L=\int_\alpha^\beta\sqrt{[X^{'}(t)]^2+[Y^{'}(t)]^2}dt$，故椭圆周长为

$$L=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{a^2\sin^2\theta+b^2\cos^2\theta}d\theta$$
$$=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{a^2(1-\cos^2\theta)+b^2\cos^2\theta}d\theta$$
$$=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-e^2\cos^2\theta}d\theta$$

其中，$e=\sqrt{\frac{a^2-b^2}{a^2}}=\frac{c}{a}$是离心率.

利用级数公式：

$$\sqrt{1+x}=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\frac{1}{2}\cdot(\frac{1}{2}-1)\cdots\cdots(\frac{1}{2}-n+1)}{n!}x^n=1+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}x^n(-1<x<1),$$

及$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2n}tdt=\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\cdot\frac{\pi}{2}$，借助逐项积分法可求出$L$的无穷级数表达式：

$$L=4a\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-e^2\sin^2 t}dt=2\pi T(a,b)$$
$$=2\pi a\{1-\sum_{n=1}^{\infty}[\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}]^2\frac{e^{2n}}{2n-1}\}$$
$$=2\pi a(1-\frac{1}{2^2}e^2-\frac{3}{2^6}e^4-\frac{5}{2^8}e^6-\frac{175}{2^{14}}e^8-\frac{441}{2^{16}}e^{10}-\frac{4851}{2^{20}}e^{12}-\frac{14157}{2^{22}}e^{14}-\frac{2760615}{2^{30}}e^{16}$$
$$-\frac{8690825}{2^{32}}e^{18}-\frac{112285459}{2^{36}}e^{20}-\cdots).$$

引理 3. $\sqrt{2a^2+2b^2}=2a[1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\frac{1}{2}\cdot(\frac{1}{2}-1)\cdots\cdots(\frac{1}{2}-n+1)}{n!}(-\frac{e^2}{2})^n]$

$$=2a(1-\frac{1}{2^2}e^2-\frac{2}{2^6}e^4-\frac{2}{2^8}e^6-\frac{40}{2^{14}}e^8-\frac{56}{2^{16}}e^{10}-\frac{336}{2^{20}}e^{12}-\frac{528}{2^{22}}e^{14}-\frac{54912}{2^{30}}e^{16}$$
$$-\frac{91520}{2^{32}}e^{18}-\frac{622336}{2^{36}}e^{20}-\cdots). \quad (16)$$

证明：$\sqrt{2a^2+2b^2}=\sqrt{2}a\sqrt{1+(\frac{b}{a})^2}=\sqrt{2}a\sqrt{1-\frac{e^2}{2}}$

$$=2a[1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\frac{1}{2}\cdot(\frac{1}{2}-1)\cdot\dots\cdot(\frac{1}{2}-n+1)}{n!}(-\frac{e^2}{2})^n]$$

$$=2a(1-\frac{1}{2^2}e^2-\frac{2}{2^6}e^4-\frac{2}{2^8}e^6-\frac{40}{2^{14}}e^8-\frac{56}{2^{16}}e^{10}-\frac{336}{2^{20}}e^{12}-\frac{528}{2^{22}}e^{14}-\frac{54912}{2^{30}}e^{16}$$

$$-\frac{91520}{2^{32}}e^{18}-\frac{622336}{2^{36}}e^{20}-\cdots).$$

引理 4. $(a+b)=2a[1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\frac{1}{2}\cdot(\frac{1}{2}-1)\cdot\dots\cdot(\frac{1}{2}-n+1)}{n!}(-e^2)^n]$

$$=2a(1-\frac{1}{2^2}e^2-\frac{4}{2^6}e^4-\frac{8}{2^8}e^6-\frac{320}{2^{14}}e^8-\frac{896}{2^{16}}e^{10}-\frac{10752}{2^{20}}e^{12}-\frac{33792}{2^{22}}e^{14}-\frac{7028736}{2^{30}}e^{16}$$

$$-\frac{23429120}{2^{32}}e^{18}-\frac{318636032}{2^{36}}e^{20}-\cdots).\qquad(17)$$

证明：$a+b=a(1+\frac{b}{a})=a(1+\sqrt{1-e^2})$

$$=2a[1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\frac{1}{2}\cdot(\frac{1}{2}-1)\cdot\dots\cdot(\frac{1}{2}-n+1)}{n!}(-e^2)^n]$$

$$=2a(1-\frac{1}{2^2}e^2-\frac{4}{2^6}e^4-\frac{8}{2^8}e^6-\frac{320}{2^{14}}e^8-\frac{896}{2^{16}}e^{10}-\frac{10752}{2^{20}}e^{12}-\frac{33792}{2^{22}}e^{14}-\frac{7028736}{2^{30}}e^{16}$$

$$-\frac{23429120}{2^{32}}e^{18}-\frac{318636032}{2^{36}}e^{20}-\cdots).$$

引理 5. $2\sqrt{ab}=2a[1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\frac{1}{4}\cdot(\frac{1}{4}-1)\cdot\dots\cdot(\frac{1}{4}-n+1)}{n!}(-e^2)^n]$

$$=2a(1-\frac{1}{2^2}e^2-\frac{6}{2^6}e^4-\frac{14}{2^8}e^6-\frac{616}{2^{14}}e^8-\frac{1848}{2^{16}}e^{10}-\frac{23048}{2^{20}}e^{12}-\frac{76912}{2^{22}}e^{14}-\frac{16612992}{2^{30}}e^{16}$$

$$-\frac{57222528}{2^{32}}e^{18}-\frac{801115392}{2^{36}}e^{20}-\cdots).\qquad(18)$$

证明：$2\sqrt{ab}=2a\sqrt{\frac{b}{a}}=2a\sqrt[4]{1-e^2}$

$$=2a[1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\frac{1}{4}\cdot(\frac{1}{4}-1)\cdot\dots\cdot(\frac{1}{4}-n+1)}{n!}(-e^2)^n]$$

$$=2a(1-\frac{1}{2^2}e^2-\frac{6}{2^6}e^4-\frac{14}{2^8}e^6-\frac{616}{2^{14}}e^8-\frac{1848}{2^{16}}e^{10}-\frac{23048}{2^{20}}e^{12}-\frac{76912}{2^{22}}e^{14}-\frac{16612992}{2^{30}}e^{16}$$

$$-\frac{57222528}{2^{32}}e^{18}-\frac{801115392}{2^{36}}e^{20}-\cdots).$$

引理 6. $\frac{4ab}{a+b}=2a[1-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1\cdot3\cdot\dots\cdot(2n-1)}{2^n(n+1)!}e^{2n}]$

$$=2a(1-\frac{1}{2^2}e^2-\frac{8}{2^6}e^4-\frac{20}{2^8}e^6-\frac{896}{2^{14}}e^8-\frac{2688}{2^{16}}e^{10}-\frac{33792}{2^{20}}e^{12}-\frac{109824}{2^{22}}e^{14}-\frac{23429120}{2^{30}}e^{16}$$

$$-\frac{76959008}{2^{32}}e^{18}-\frac{1100742656}{2^{36}}e^{20}-\cdots).\qquad(19)$$

证明：$\frac{4ab}{a+b}=4a\frac{\frac{b}{a}}{1+\frac{b}{a}}=4a\frac{\sqrt{1-e^2}}{1+\sqrt{1-e^2}}=4a\frac{\sqrt{1-e^2}-1+e^2}{e^2}$

$$=2a[1-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1\cdot3\cdot\cdots\cdot(2n-1)}{2^n(n+1)!}e^{2n}]$$

$$=2a(1-\frac{1}{2^2}e^2-\frac{8}{2^6}e^4-\frac{20}{2^8}e^6-\frac{896}{2^{14}}e^8-\frac{2688}{2^{16}}e^{10}-\frac{33792}{2^{20}}e^{12}-\frac{109824}{2^{22}}e^{14}-\frac{23429120}{2^{30}}e^{16}$$

$$-\frac{76959008}{2^{32}}e^{18}-\frac{1100742656}{2^{36}}e^{20}-\cdots).$$

3. 主要结论与研究过程

椭圆周长公式一直是数学史上一张缺了角的纸,清代数学家项达明曾推到十分精确的项达明公式[6]：

$$L=2\pi a(1-\frac{1}{2^2}k^2-\frac{1^2\cdot3}{2^2\cdot4^2}k^4-\frac{1^2\cdot3^2\cdot5}{2^2\cdot4^2\cdot6^2}k^6-\cdots)\qquad(20)$$

其中$k=\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}$；椭圆离心率，$a$、$b$为半长轴和半短轴.

该公式的一个积分证明见引理2. 很显然，这个公式十分繁琐.

文[7]、[8]中，引入了a,b的平方平均、算术平均、几何平均、调和平均，并按离心率k的正整次幂展开幂级数（见引理 3-6）考虑到这五个展开式之中都是形如

$$a(1-x_1k^2-x_2k^4-x_3k^6\cdots)\qquad(21)$$

的形式，不妨将其各项系数的相反数归纳成下表，为了方便比较，同时附上$T(a,b)$中从k^2到k^{20}的各项展开系数的相反数（见下表）.

k 次方	$T(a,b)$	$S(a,b)$	$A(a,b)$	$G(a,b)$	$H(a,b)$
2	$\frac{1}{2^2}$	$\frac{1}{2^2}$	$\frac{1}{2^2}$	$\frac{1}{2^2}$	$\frac{1}{2^2}$
4	$\frac{3}{2^6}$	$\frac{2}{2^6}$	$\frac{4}{2^6}$	$\frac{6}{2^6}$	$\frac{8}{2^6}$
6	$\frac{5}{2^8}$	$\frac{2}{2^8}$	$\frac{8}{2^8}$	$\frac{14}{2^8}$	$\frac{20}{2^8}$
8	$\frac{175}{2^{14}}$	$\frac{40}{2^{14}}$	$\frac{320}{2^{14}}$	$\frac{616}{2^{14}}$	$\frac{896}{2^{14}}$
10	$\frac{441}{2^{16}}$	$\frac{56}{2^{16}}$	$\frac{896}{2^{16}}$	$\frac{1848}{2^{16}}$	$\frac{2688}{2^{16}}$
12	$\frac{4851}{2^{20}}$	$\frac{336}{2^{20}}$	$\frac{10752}{2^{20}}$	$\frac{23048}{2^{20}}$	$\frac{33792}{2^{20}}$
14	$\frac{14157}{2^{22}}$	$\frac{528}{2^{22}}$	$\frac{33792}{2^{22}}$	$\frac{76912}{2^{22}}$	$\frac{109824}{2^{22}}$

16	$\frac{2760615}{2^{30}}$	$\frac{54912}{2^{30}}$	$\frac{7028736}{2^{30}}$	$\frac{16612992}{2^{30}}$	$\frac{23429120}{2^{30}}$
18	$\frac{8690825}{2^{32}}$	$\frac{91520}{2^{32}}$	$\frac{23429120}{2^{32}}$	$\frac{57222528}{2^{32}}$	$\frac{76959008}{2^{32}}$
20	$\frac{112285459}{2^{36}}$	$\frac{622336}{2^{36}}$	$\frac{318636032}{2^{36}}$	$\frac{801115392}{2^{36}}$	$\frac{1100742656}{2^{36}}$

注：表中的系数从k^2项到k^{10}项可在文[7]、[8]中查到、k^{12}项到k^{20}项由maple软件算出.

为了寻找$T(a,b)$与$S(a,b)$、$A(a,b)$、$G(a,b)$、$H(a,b)$的不等关系．不妨设

$$T(a,b)\approx mS(a,b)+nA(a,b)+pG(a,b)+qH(a,b). \tag{22}$$

考虑到精度要求，四元方程组列出四条方程，则有

$$\begin{cases} m+n+p+q=1, \\ 2m+4n+6p+8q=3, \\ 2m+8n+14p+20q=5, \\ 40m+320n+616p+896q=175. \end{cases} \tag{23}$$

依次将m、n、p消去，解得$m=\frac{3}{16},n=\frac{9}{8},p=-\frac{5}{16},q=0$.

考虑到该方程组中m、q项系数之和等于n、p项系数之和，运用maple软件解得$m=\frac{3}{16}+q,n=\frac{9}{8}-q,p=-\frac{5}{16}-q,q=q$.（该方程组有多组解的原因参照后文推广部分）

假设$q=0$，有

$$T(a,b)\approx a[\frac{3}{16}S(a,b)+\frac{9}{8}A(a,b)-\frac{3}{16}H(a,b)]. \tag{24}$$

借助（24）式，以及$L=2\pi T(a,b)$，可以求出椭圆周长L的一个上界，即

$$L\le 2\pi a[\frac{3}{16}S(a,b)+\frac{9}{8}A(a,b)-\frac{3}{16}H(a,b)].\ [7] \tag{25}$$

事实上，文[8]给出了椭圆周长L的一组强度十分之高的上下界：

$$\frac{\pi}{16}[23(a+b)-\frac{20ab}{a+b}-\sqrt{8(a^2+b^2)}]$$
$$\approx(<)L(<)\approx\frac{\pi}{16}[21(a+b)-4\sqrt{ab}-\frac{12ab}{a+b}]. \tag{26}$$

即

$$\frac{1}{32}[23A(a,b)-5H(a,b)-2S(a,b)]\le T(a,b)\le\frac{1}{32}[21A(a,b)-2G(a,b)-3H(a,b)]. \tag{27}$$

检验这组上、下界，可以得出他们的系数，与$T(a,b)$相比，直至k^{10}项系数均相等．而k^{12}项系数，前者为$-\frac{4854}{2^{20}}$，$T(a,b)$为$-\frac{4851}{2^{20}}$，上界为$-\frac{4850}{2^{20}}$.

利用二分法，取上、下界平均值：

$$T(a,b)\approx\frac{11}{8}A(a,b)-\frac{1}{4}H(a,b)-\frac{1}{16}S(a,b)-\frac{1}{16}G(a,b). \tag{28}$$

$$=a(1-\frac{1}{2^2}k^2-\frac{3}{2^6}k^4-\frac{5}{2^8}k^6-\frac{175}{2^{14}}k^8-\frac{441}{2^{16}}k^{10}-\frac{1213}{2^{18}}k^{12}-\frac{1771}{2^{19}}k^{14}$$

$$-\frac{172843}{2^{26}}k^{16}-\frac{544885}{2^{28}}k^{18}-\frac{1762973}{2^{30}}k^{20}-\cdots). \qquad (29)$$

展开得起k^{12}项系数为$-\frac{4852}{2^{20}}$，小于$T(a,b)$的展开项系数. 考虑到（27）式上界的k^{12}项系数为$-\frac{4850}{2^{20}}$，将（27）上界与（28）二分，求出

$$T(a,b)\approx\frac{43}{32}A(a,b)-\frac{7}{32}H(a,b)-\frac{3}{32}G(a,b)-\frac{1}{32}S(a,b). \qquad (30)$$

展开后发现它的精确度相当之高：

$$(30)=a(1-\frac{1}{2^2}k^2-\frac{3}{2^6}k^4-\frac{5}{2^8}k^6-\frac{175}{2^{14}}k^8-\frac{441}{2^{16}}k^{10}-\frac{4851}{2^{20}}k^{12}-\frac{14157}{2^{22}}k^{14}$$
$$-\frac{2760560}{2^{30}}k^{16}-\frac{8690000}{2^{32}}k^{18}-\frac{112211946}{2^{36}}k^{20}-\cdots). \qquad (31)$$

对比可知,它精确到k^{14}项,且将它的k^{16}项与L的k^{16}项系数作商,比值均等于0.99998，再看它的k^{18}项与L的k^{18}项系数之比，亦高达0.9999.通过maple软件进行验算，（30）式是$T(a,b)$的上界.

那么，又是否能找到一个同样精确的下界呢？

假设推导得出的下界与$T(a,b)$作差，k^4项系数小于0.若k^6项、k^8项一直到k无穷次方项系数均小于0，那么该下界精确度不足，只需要另外寻找一k^4项系数与$T(a,b)$相同的下界即可得到更加精确的结果；若这个差的k^{2n}的系数大于0，则可能在k取某一个值的时候差大于0，这求得的就不是界了.因此为了提高下界的精度，需要让下界与$T(a,b)$的差更多项k展开项系数等于0.

考察由待定系数法解得的方程（23）的关于(m,n,p,q)的解集：$m=\frac{3}{16}+q,n=\frac{9}{8}-q,p=-\frac{5}{16}-q,q=q$，将$q=0$代入，得到$k^{12}$项系数为$-\frac{4844}{2^{20}}$，将$q=-\frac{1}{4}$代入，得到$k^{12}$项系数为$-\frac{4852}{2^{20}}$，将$q=-\frac{7}{32}$代入，得到$k^{12}$项系数是$-\frac{4851}{2^{20}}$.

由此猜想：当$q=-\frac{i}{32}$ $(i\in[0,9],i\in N)$时，k的k^{12}项的系数为$-\frac{4844+i}{2^{20}}$.将整数 i 可能的值代入，证明猜想是成立的.进一步推论，当$i\in Q$时猜想也成立.考虑到$T(a,b)$展开项当中k^{12}项的系数为$-\frac{4851}{2^{20}}$，据此有推论：假设实数组(m,n,p,q)使得$mS(a,b)+nA(a,b)+pG(a,b)+qH(a,b)$无限逼近$T(a,b)$，那么此时$q\approx-\frac{7}{32}$.

进一步考察（29）、（30），（29）式的k^{14}项的系数为$-\frac{14168}{2^{22}}$，k^{16}项的系数为$-\frac{2765488}{2^{30}}$，（30）的k^{16}项的系数是$-\frac{2760560}{2^{30}}$.

$\because -\frac{2765488}{2^{30}}<-\frac{2760615}{2^{30}}<-\frac{2760560}{2^{30}}$，$\therefore$利用（29）、（30）式连续多次进行二分法，有其中某次结果的k^{16}项的系数小于$-\frac{2760615}{2^{30}}$，而下一次二分的结果大于$-\frac{2765488}{2^{30}}$.

经计算，利用（29）、（30）二式连续 6 次二分，即$q=-\frac{449}{2048}$时，有一个十分精确的近似值$\frac{2753}{2048}A(a,b)-\frac{449}{2048}H(a,b)-\frac{65}{2048}G(a,b)-\frac{197}{2048}S(a,b)$ （32）

泰勒展开，有

$$\frac{2753}{2048}A(a,b)-\frac{449}{2048}H(a,b)-\frac{65}{2048}G(a,b)-\frac{191}{2048}S(a,b)$$

$$=1-\frac{1}{2^2}k^2-\frac{3}{2^6}k^4-\frac{5}{2^8}k^6-\frac{175}{2^{14}}k^8-\frac{441}{2^{16}}k^{10}-\frac{310465}{2^{26}}k^{12}-\frac{906059}{2^{26}}k^{14}-\frac{2760637}{2^{30}}k^{16}\ldots$$

同理第七次二分，即当$q=-\frac{897}{4096}$时，可以得到另一个同样精确的近似值：

$$\frac{5505}{4096}A(a,b)-\frac{897}{4096}H(a,b)-\frac{383}{4096}G(a,b)-\frac{129}{4096}S(a,b) \quad (33)$$

泰勒展开，有

$$\frac{5505}{4096}A(a,b)-\frac{897}{4096}H(a,b)-\frac{383}{4096}G(a,b)-\frac{129}{4096}S(a,b)$$

$$=1-\frac{1}{2^2}k^2-\frac{3}{2^6}k^4-\frac{5}{2^8}k^6-\frac{175}{2^{14}}k^8-\frac{441}{2^{16}}k^{10}-\frac{620929}{2^{27}}k^{12}-\frac{1812107}{2^{29}}k^{14}$$

$$-\frac{5521197}{2^{31}}k^{16}-\frac{2172555}{2^{30}}k^{18}-\frac{898081479}{2^{39}}k^{20}\ldots$$

接下来，考察（28），（32），（33）.

由（28）及引理 1、2，算出两个椭圆$C_1:a=1,b=0.05$，$C_2:a=1,b=0.5$，的周长，并与文[10]当中椭圆周长的真值作比较. 可以发现，由（28）算出C_1的周长大于文[11]中提到的真值，但算出C_2的周长却小于文[11]中提到的真值. 这也说明了（28）在某些时候大于$T(a,b)$，某些时候小于$T(a,b)$，故（28）并不是$T(a,b)$的上界或下界. 同理考察（33）可以得到一样的结果，故（33）也不是$T(a,b)$的上界或下界.

再考察（32），（32）泰勒展开式中，k^{12}、k^{14}项的系数均小于$T(a,b)$，但是（32）式的k^{16}项的系数却大于$T(a,b)$，这说明（32）在某些情况下大于$T(a,b)$，某些情况下小于由（28）以及（32）知，仅仅由泰勒展开式的前面几项的系数不能求出下界. 为了求出下界，不妨设$a=1,b=x$，则将近似公式化为

$$(\frac{3}{16}+q)\times\sqrt{\frac{1+x^2}{2}}+(\frac{9}{8}-q)\times\frac{1+x}{2}+(-\frac{5}{16}-q)\times\sqrt{x}+q\times\frac{2x}{1+x}.$$

令$f(x)=(\frac{3}{16}+q)\times\sqrt{\frac{1+x^2}{2}}+(\frac{9}{8}-q)\times\frac{1+x}{2}+(-\frac{5}{16}-q)\times\sqrt{x}+q\times\frac{2x}{1+x}$

则有$f^{'}(x)=\dfrac{x(\frac{3}{16}+q)\sqrt{\frac{x^2+1}{2}}}{x^2+1}+(\frac{9}{8}-q)+\dfrac{-\frac{5}{16}-q}{2\sqrt{x}}+\dfrac{2q}{(x+1)^2}$.

令$f^{'}(x)=0$，可以用 maple 解得其中的实数根x_1为和q有关的非负实根，q取不同值的时候x_1也有不同的值. 在$q=0$的时候有$x_1\approx 0.01920312361$.

由此可以说明，当$0\le x\le x_1$时，函数$f^{'}(x)\le 0$，故有$f(0)\ge f(x_1)$. 考虑到$T(1,x)$在$x\in[0,1]$上显然是单调递增的，有$T(1,0)\le T(1,x_1)$. 又因为在$0\le x\le 1$时$f(x)\le T(1,x)$，所以$0\le x\le x_1$时也有$f(x)\le T(1,x)$. 故$f(0)\le T(1,0)$. 在此的基础上，使用 maple 软件进

行更加精细的计算，可以得出$T(a,b)$的下界：

$$\frac{2883}{2048}A(a,b)-\frac{579}{2048}H(a,b)-\frac{61}{2048}G(a,b)-\frac{195}{2048}S(a,b)\,. \tag{34}$$

考虑到运用二分法可能会求出满足$f(0)\ge T(1,0)$的近似公式，本文不在（34）和（30）的基础上继续采用二分法.

接下来，我们对（30）式和（34）式进行误差分析：

a	b	下界	下界/真值	“真值”	上界/真值	上界
		（34）				（30）
1	0.00	3.999438207	0.9998595518	4	1.020668759	4.082675036
1	0.05	4.009009874	0.9974086482	4.019425620	1.002876644	4.030962381
1	0.10	4.057412652	0.9983854405	4.063974180	1.000999318	4.067961130
1	0.15	4.122198813	0.9990544382	4.126100296	1.000378119	4.127660157
1	0.20	4.199743250	0.9994608155	4.202008908	1.000152428	4.202649005
1	0.25	4.287922836	0.9996996995	4.289210888	1.000062318	4.289477794
1	0.30	4.385194345	0.9998368131	4.385910068	1.000025327	4.386021082
1	0.35	4.490352261	0.9999137534	4.490739572	1.000010111	4.490785007
1	0.40	4.602419414	0.9999558717	4.602622520	1.000003928	4.602640601
1	0.45	4.720586687	0.9999782750	4.720689244	1.000001465	4.720696159
1	0.50	4.844174652	0.9999897903	4.8442241102	1.000000518	4.844226618
1	0.55	4.972606862	0.9999954675	4.9726294004	1.000000171	4.972630249
1	0.60	5.105390207	0.9999983222	5.1053997727	1.000000051	5.105400035
1	0.65	5.242099893	0.9999992929	5.2421035996	1.000000014	5.242103672
1	0.70	5.382367708	0.9999997634	5.3823689815	1.000000003	5.382368998
1	0.75	5.525872670	0.9999999933	5.5258730402	1.000000001	5.525873043
1	0.80	5.672333493	0.9999999851	5.6723335778	1.000000001	5.672333578
1	0.85	5.821502467	0.9999999977	5.8215024803	1.000000001	5.821502480
1	0.90	5.973160432	0.9999999999	5.9731604325	1.000000001	5.973160433
1	0.95	6.127112637	0.9999999999	6.1271126366	1.000000001	6.127112637
1	1.00	6.283185307	0.9999999999	6.2831853072	1.000000001	6.283185307

注 1：这个表的上下界由于是学生计算器计算而得，只能取 10 位数字，其中最后一位是四舍五入求得故上界在b接近a时可能由于四舍五入而导致显示的上界的数值比“真值”略小，而下界的数字比“真值”略大，这是属于学生计算器不足而导致的，并非上界与下界不精确而导致的.

注 2：表中的“真值”见文[10]，文[10]中不精确部分由 maple 软件算出.

考察上表可以得出：当k越小时，上下界的精确度越高.从几何角度来说，离心率越小，椭圆越接近圆，而本文的上下界是将椭圆类比成圆推导出来的，因此椭圆越接近圆，上下界就会越逼近真实值.

设$a=1$，b为$[0,1]$中的某一随机值．对上表分析（30）式和（34）式的误差，可以得到以下几个结论：

Ⅰ、对于所有椭圆，用$2\pi\times$（30）作为近似公式计算其周长，有

（i）90%以上的概率使得其误差小于千分之一.

（ii）75%以上的概率，使得其误差小于万分之一.

（iii）略低于 65%的概率，使得其误差小于十万分之一.

（iv）50%以上的概率，使得其误差小于百万分之一.

（v）40%以上的概率，使得其误差小于千万分之一.

Ⅱ、对于所有椭圆，用$2\pi\times$（34）作为近似公式计算其周长，有

（i）85%以上的概率使得其误差小于千分之一.

（ii）超过 65%的概率，使得其误差小于万分之一.

（iii）超过 45%的概率，使得其误差小于十万分之一.

（iv）35%以上的概率，使得其误差小于百万分之一.

Ⅲ、（30）式和（34）式与$T(a,b)$的误差概率同Ⅰ、Ⅱ.

考虑到（30）式的泰勒展开式可以精确到k的 14 次方幂，而（34）式的泰勒展开式仅逼近但不精确到k的 12 次方幂，（30）会比（34）略微精确.

回到 Toader 平均，则有一条很漂亮的不等式：

$$\frac{2883}{2048}A(a,b)-\frac{579}{2048}H(a,b)-\frac{61}{2048}G(a,b)-\frac{195}{2048}S(a,b)\le T(a,b)$$
$$\le\frac{43}{32}A(a,b)-\frac{7}{32}H(a,b)-\frac{3}{32}G(a,b)-\frac{1}{32}S(a,b)\quad . \tag{35}$$

查阅参考文献，以及提及的关于$T(a,b)$的不等式有许多.

接下来，本文对比上文发现的上、下界与参考文献中提及的上、下界.

文[4]给出一组了关于$T(a,b)$的不等式：

$$\frac{1}{2}\times\frac{1+\sqrt{1-k^2}+1-k^2}{1+\sqrt{1-k^2}}+\frac{1}{8}\times(1+\sqrt{1-k^2})<T(a,b)$$
$$<(\frac{8}{\pi}-2)\times\frac{1+\sqrt{1-k^2}+1-k^2}{1+\sqrt{1-k^2}}+(2-\frac{6}{\pi})\times(1+\sqrt{1-k^2}), \tag{36}$$

其中$k=\dfrac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}$.

事实上，（36）式与（5）式等价.

用定理 1 中得出的上界与（5）式中上界作差，利用 maple 软件计算得出的结果如下：

$$a[\frac{43}{32}\cdot\frac{1+\sqrt{1-k^2}}{2}-\frac{7}{32}\cdot\frac{2(\sqrt{1-k^2}-1+k^2)}{k^2}-\frac{3}{32}\cdot\sqrt[4]{1-k^2}-\frac{1}{32}\cdot\sqrt{1-\frac{k^2}{2}}]$$
$$-a[(\frac{8}{\pi}-2)\cdot\frac{1+\sqrt{1-k^2}+1-k^2}{1+\sqrt{1-k^2}}+(2-\frac{6}{\pi})\cdot(1+\sqrt{1-k^2})]$$
$$=\frac{43}{32}A(a,b)-\frac{7}{32}H(a,b)-\frac{3}{32}G(a,b)-\frac{1}{32}S(a,b)-\frac{2}{\pi}\cdot\frac{\pi ab+(a-b)^2}{a+b}$$
$$=\frac{43}{32}A(a,b)-\frac{7}{32}H(a,b)-\frac{3}{32}G(a,b)-\frac{1}{32}S(a,b)-[\frac{4}{\pi}\cdot A(a,b)+(1-\frac{4}{\pi})H(a,b)]$$
$$=(\frac{43}{32}-\frac{4}{\pi})A(a,b)-(\frac{29}{32}-\frac{4}{\pi})H(a,b)-\frac{3}{32}G(a,b)-\frac{1}{32}S(a,b)$$
$$=a[(-\frac{3}{4}+\frac{3}{\pi}+\frac{3}{4}\cdot\frac{-4+\pi}{\pi})k^2+(-\frac{1}{4\pi}+\frac{5}{64})k^4+(\frac{11}{256}-\frac{1}{8\pi}+\frac{1}{64}\cdot\frac{-4+\pi}{\pi})k^6$$
$$+(\frac{465}{16384}-\frac{5}{64\pi}+\frac{1}{64}\cdot\frac{-4+\pi}{\pi})k^8+(\frac{7}{512}\cdot\frac{-4+\pi}{\pi}-\frac{7}{128\pi}+\frac{1351}{65536})k^{10}$$
$$+(\frac{16653}{1048576}+\frac{3}{256}\cdot\frac{-4+\pi}{\pi}-\frac{21}{512\pi})k^{12}+(\frac{53427}{4194304}+\frac{165}{16384}\cdot\frac{-4+\pi}{\pi}-\frac{33}{1024\pi})k^{14}$$
$$+(\frac{706057}{67108864}+\frac{142}{16384}\cdot\frac{-4+\pi}{\pi}-\frac{429}{16384\pi})k^{16}+(\frac{2385515}{268435456}+\frac{1001}{131072}\cdot\frac{-4+\pi}{\pi}-\frac{715}{32768\pi})k^{18}$$
$$+(\frac{32813523}{4294967296}+\frac{221}{32768}\cdot\frac{-4+\pi}{\pi}-\frac{2431}{131072\pi})k^{20}$$

$$+(\frac{114464493}{17179869184}+\frac{12597}{2097152}\cdot\frac{-4+\pi}{\pi}-\frac{4199}{262144\pi})k^{22}$$
$$+(\frac{808069563}{137438953472}+\frac{11305}{2097152}\cdot\frac{-4+\pi}{\pi}-\frac{29393}{2097152\pi})k^{24}$$
$$+(\frac{2880773483}{549755813888}+\frac{81719}{16777216}\cdot\frac{-4+\pi}{\pi}-\frac{52003}{419404\pi})k^{26}$$
$$+(\frac{41429163149}{8796093022208}+\frac{37145}{8388608}\cdot\frac{-4+\pi}{\pi}-\frac{185725}{16777216\pi})k^{28}$$
$$+(\frac{150042970683}{35184372088832}+\frac{4345965}{1073741824}\cdot\frac{-4+\pi}{\pi}-\frac{334305}{33554432\pi})k^{30}$$
$$+(\frac{4375026633141}{1125899906842624}+\frac{3991995}{1073741824}\cdot\frac{-4+\pi}{\pi}-\frac{9694845}{1073741824\pi})k^{32}$$
$$+(\frac{16035710388339}{4503599627370496}+\frac{29464725}{8589934592}\cdot\frac{-4+\pi}{\pi}-\frac{17678835}{2147483648\pi})k^{34}$$
$$+(\frac{236271807547479}{72057594037927936}+\frac{3411705}{1073741824}\cdot\frac{-4+\pi}{\pi}-\frac{64822395}{8589934592\pi})k^{36}$$
$$+(\frac{405992895}{137438953472}\cdot\frac{-4+\pi}{\pi}-\frac{119409675}{17179869184\pi}+\frac{874178618994681}{288230376151711744})k^{38}$$
$$+(\frac{6494516919141405}{2305843009213693952}+\frac{378699255}{137438953472}\cdot\frac{-4+\pi}{\pi}-\frac{883631595}{137438953472\pi})k^{40}+...]$$
（37）

用 maple 软件将（37）式当中k的正整次幂系数换算成浮点形式，发现（37）式k^2项直到k^{32}项系数均为负值，从k^{34}项开始系数为正值. 又因为k ⩾0，所以定理 1 中的的上界与（5）式不分强弱. 由 maple16 软件更加精细地计算得：

当$0<\frac{b}{a}\le 0.0399212204\cdots$时，

$$\frac{43}{32}A(a,b)-\frac{7}{32}H(a,b)-\frac{3}{32}G(a,b)-\frac{1}{32}S(a,b)\ge\frac{2}{\pi}\cdot\frac{\pi ab+(a-b)^2}{a+b};$$

当$\frac{b}{a}\ge 0.0399212204\cdots$时，

$$\frac{43}{32}A(a,b)-\frac{7}{32}H(a,b)-\frac{3}{32}G(a,b)-\frac{1}{32}S(a,b)\le\frac{2}{\pi}\cdot\frac{\pi ab+(a-b)^2}{a+b}.$$

这说明，当$\frac{b}{a}\ge 0.0399212204\cdots$时，（5）式比（35）式的上界弱. 假设$a=1$，$b$为$[0,1]$中的某一随机值，可以得出结论：（35）式的上界比（5）式的上界更强的概率约为 96%. 也就是说，在绝大部分情形下，（35）式上界比（5）式上界更强.

同时，用定理 1 中的下界与（5）式中的下界作差，利用 maple 软件可以得到如下结果：

$$a[\frac{2883}{2048}\cdot\frac{1+\sqrt{1-k^2}}{2}-\frac{289}{2048}\cdot\frac{2(\sqrt{1-k^2}-1+k^2)}{k^2}-\frac{61}{2048}\cdot\sqrt[4]{1-k^2}-\frac{195}{2048}\cdot\sqrt{1-\frac{k^2}{2}}]$$
$$-a[\frac{1}{2}\cdot\frac{1+\sqrt{1-k^2}+1-k^2}{1+\sqrt{1-k^2}}+\frac{1}{8}\cdot(1+\sqrt{1-k^2})]$$
$$=\frac{2883}{2048}A(a,b)-\frac{579}{2048}H(a,b)-\frac{61}{2048}G(a,b)-\frac{195}{2048}S(a,b)-\frac{5a^2+6ab+5b^2}{8(a+b)}$$

$$=\frac{2883}{2048}A(a,b)-\frac{579}{2048}H(a,b)-\frac{61}{2048}G(a,b)-\frac{195}{2048}S(a,b)-[\frac{5}{4}A(a,b)-\frac{1}{4}H(a,b)]$$

$$=\frac{323}{2048}A(a,b)-\frac{67}{2048}H(a,b)-\frac{61}{2048}G(a,b)-\frac{195}{2048}S(a,b)$$

$$=a(\frac{1}{16384}k^{8}+\frac{7}{65536}k^{10}+\frac{8893}{67108864}k^{12}+\frac{38687}{268435456}k^{14}+\frac{157993}{1073741824}k^{16}$$

$$+\frac{78001}{536870912}k^{18}+\frac{38710379}{274877906944}k^{20}+\frac{148541601}{1099511627776}k^{22}$$

$$+\frac{566769259}{4398046511104}k^{24}+\frac{539077519}{4398046511104}k^{26}+\cdots) \tag{38}$$

考察每一项的系数，均大于 0，又因为$k\geqslant 0$，所以定理 1 中的下界亦更加逼近$T(a,b)$.
因此，我们可以得到一串不等式链：

$$\frac{1}{2}\times\frac{1+\sqrt{1-k^{2}}+1-k^{2}}{1+\sqrt{1-k^{2}}}+\frac{1}{8}\times(1+\sqrt{1-k^{2}})$$

$$\leq\frac{2883}{2048}A(a,b)-\frac{579}{2048}H(a,b)-\frac{61}{2048}G(a,b)-\frac{195}{2048}S(a,b)$$

$$\leq T(a,b)$$

$$\leq\begin{cases}\frac{43}{32}A(a,b)-\frac{7}{32}H(a,b)-\frac{3}{32}G(a,b)-\frac{1}{32}S(a,b)\\(\frac{8}{\pi}-2)\times\frac{1+\sqrt{1-k^{2}}+1-k^{2}}{1+\sqrt{1-k^{2}}}+(2-\frac{6}{\pi})\times(1+\sqrt{1-k^{2}})\end{cases} \tag{39}$$

其中$k=\frac{\sqrt{a^{2}-b^{2}}}{a}$.

与此同时，文[9]中也提到

$$\frac{a+b}{2}\leq T(a,b)\leq\frac{4a+\pi b}{2\pi}, \tag{40}$$

同样的，与（5）式作比较，可以得到

$$\frac{a+b}{2}\leq\frac{5a^{2}+6ab+5b^{2}}{8(a+b)}<T(a,b). \tag{41}$$

因为$\frac{5a^{2}+6ab+5b^{2}}{8(a+b)}-\frac{a+b}{2}=\frac{5a^{2}+6ab+5b^{2}-4(a+b)^{2}}{8(a+b)}=\frac{(a-b)^{2}}{8(a+b)}\geq 0$.

而$\frac{2}{\pi}\cdot\frac{\pi ab+(a-b)^{2}}{a+b}$与$\frac{4a+\pi b}{2\pi}$不分强弱.

事实上，$\frac{4a+\pi b}{2\pi}-\frac{2}{\pi}\cdot\frac{\pi ab+(a-b)^{2}}{a+b}=\frac{(4a+\pi b)(a+b)-4[\pi ab+(a-b)^{2}]}{2\pi(a+b)}$

$$=\frac{(12-3\pi)ab+(\pi-4)b^{2}}{2\pi(a+b)}=\frac{b(4-\pi)(3a-b)}{2\pi(a+b)}.$$

∴当$3a>b$时，$\frac{4a+\pi b}{2\pi}>\frac{2}{\pi}\cdot\frac{\pi ab+(a-b)^{2}}{a+b}$；

当$3a=b$时，$\frac{4a+\pi b}{2\pi}=\frac{2}{\pi}\cdot\frac{\pi ab+(a-b)^{2}}{a+b}$；

当$3a<b$时，$\dfrac{4a+\pi b}{2\pi}<\dfrac{2}{\pi}\cdot\dfrac{\pi ab+(a-b)^2}{a+b}$.

由$L=2\pi T(a,b)$及$a>b$可得到

$$\pi(a+b)\le\frac{\pi[5a^2+6ab+5b^2]}{4(a+b)}<L<\frac{4[\pi ab+(a-b)^2]}{a+b}<4a+\pi b\,. \tag{42}$$

不难看出，定理 1 与定理 2，确实很强.

综上所述，我们有一串不等式链：

$$\begin{aligned}&\frac{a+b}{2}\le\frac{1}{2}\times\frac{1+\sqrt{1-k^2}+1-k^2}{1+\sqrt{1-k^2}}+\frac{1}{8}\times(1+\sqrt{1-k^2})\\&\le\frac{2883}{2048}A(a,b)-\frac{579}{2048}H(a,b)-\frac{61}{2048}G(a,b)-\frac{195}{2048}S(a,b)\\&\le T(a,b)\\&\le\begin{cases}\dfrac{43}{32}A(a,b)-\dfrac{7}{32}H(a,b)-\dfrac{3}{32}G(a,b)-\dfrac{1}{32}S(a,b)\\(\dfrac{8}{\pi}-2)\times\dfrac{1+\sqrt{1-k^2}+1-k^2}{1+\sqrt{1-k^2}}+(2-\dfrac{6}{\pi})\times(1+\sqrt{1-k^2})\le\dfrac{4a+\pi b}{2\pi}\end{cases}\end{aligned} \tag{43}$$

相应的椭圆周长公式有

$$\begin{aligned}&\pi(a+b)\le\pi a[\frac{1+\sqrt{1-k^2}+1-k^2}{1+\sqrt{1-k^2}}+\frac{1}{4}(1+\sqrt{1-k^2})]\\&\le\frac{\pi}{1024}[2883A(a,b)-579H(a,b)-61G(a,b)-195S(a,b)]\le L\\&\le\begin{cases}\dfrac{\pi}{16}[43A(a,b)-7H(a,b)-3G(a,b)-S(a,b)]\\(16-4\pi)\cdot\dfrac{1+\sqrt{1-k^2}+1-k^2}{1+\sqrt{1-k^2}}+(4\pi-6)(1+\sqrt{1-k^2})\le 4a+\pi b\end{cases}.\end{aligned} \tag{44}$$

推广：在研究$T(a,b)$近似值的过程当中，发现了很多组近似公式的泰勒展开项系数一直到k的 10 次幂都是与$T(a,b)$的泰勒展开项系数相同. 但是用待定系数法列出四元一次方程组并解方程的角度来说，这个四元一次方程组应该只有一组解. 这个结果明显与研究过程的情形不同，这是为什么呢？在整个研究过程当中，发现了很多组$(m、n、p、q)$使得$mS(a,b)+nA(a,b)+pG(a,b)+qH(a,b)$能够精确到$k$的 10 次幂，但迄今为止也只发现了一组$(m、n、p、q)$能够使得$mS(a,b)+nA(a,b)+pG(a,b)+qH(a,b)$精确到$k$的 14 次幂，即便是上文发现的精度比较高的下界的泰勒展开项，k的 12 次幂系数与$T(a,b)$中k的 12 次幂系数也不一样.

考察方程组$\begin{cases}m+n+p+q=1\\2m+4n+6p+8q=3\\2m+8n+14p+20q=5\\40m+320n+616p+896q=175\end{cases}$

这个方程显然有解. 同时有：在同一条式子中，m的系数与q的系数之和等于n的系数与p的系数之和. 不妨设$(m_1、n_1、p_1、q_1)$为该方程组的其中一组解. 令$m_2=m_1+\Delta x,n_2=n_1-\Delta x,p_2=p_1-\Delta x,q_2=q_1+\Delta x(\Delta x\ne 0)$代入原方程组，显然成立，

因此$(m_2、n_2、p_2、q_2)$也为该方程组的解. 由此可以证明，这个方程组有无数组实数解. 因此可以大胆猜测：已知方程组$\begin{cases} a_1m+b_1n+c_1p+d_1q=e_1 \\ a_2m+b_2n+c_2p+d_2q=e_2 \\ a_3m+b_3n+c_3p+d_3q=e_3 \\ a_4m+b_4n+c_4p+d_4q=e_4 \end{cases}$有实数解.
若对$i=1,2,3,4$均有$a_i+b_i=c_i+d_i$则该方程组有无数组实数解.

更一般的，有以下结论：由 2N 条两两不同的方程组成的 2N 元一次方程组中，若其中 N 个未知数在任一条方程中的系数和均等于另外 N 个未知数在这条方程中的系数和，那么该方程组有无数组实数解或者无实数解.

4. 椭圆周长近似公式的应用

椭圆积分、Toader 平均，以及椭圆周长近似公式在数学、物理、天文学以及工程中有着广泛应用. 下面从文[11]中的几道习题略谈定理 2 的应用.

例 1.（选修 2-1P49 页习题 2-2A 组第 9 题）彗星“紫金山一号”是南京天文台发现的. 它的运行轨道是以太阳中心为一个焦点的椭圆. 测得轨道的近日点(距离太阳最近的点)距太阳中心 1. 486 天文单位，远日点（距离太阳最远的点）距太阳中心 5. 563 天文单位（1 天文单位是太阳到地球的平均距离，约 1. 5$\times 10^8$km)，且近日点、远日点及太阳中心在同一条直线上，求轨道的方程.

解: 由天文学知识知，太阳直径 1,392,000 公里(地球直径的 109 倍)，可以换算成 0.0928 天文单位. 据此可以求出该彗星运动轨迹的长轴为 3.571 天文单位，短轴为 2.899 天文单位. 不难求的轨道的方程是$\frac{x^2}{3.571^2}+\frac{y^2}{2.899^2}=1$.（$a,b$的单位均为 1 天文单位）

由此，我们借助定理 2，得到该人造地球卫星的轨道周长为 20.38095945 至 20.38095966 天文单位，可见定理 2 的精确度很高.

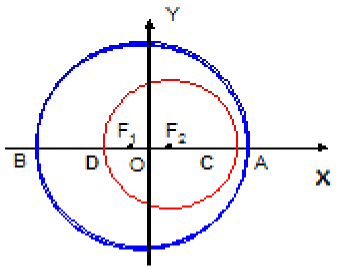
例 2.（选修 2-1P49 页习题 2-2A 组第 10 题）已知地球运行轨道是长半轴长$a=1.50\times10^8$km，离心率$e=0.0192$的椭圆，且太阳在这个椭圆的一个焦点上，求地球到太阳的最大和最小距离.

解： 由$a=1.50\times10^8$km，得$b=\sqrt{a^2-c^2}=a\sqrt{1-e^2}$=1. 4997$\times 10^8$km，

由此，我们借助定理 2，得到该地球轨道的周长为

9.423835509$\times 10^8$km<(≈)L<(≈)9.423835509km. 可见定理 2 精确度很高.

例 3.（选修 2-1 复习参考题 P80A 组第 1 题）如图，我国发射的第一颗人造地球卫星的运行轨道，是以地心(地球的中心)F2 为一个焦点的椭圆，已知它的近地点 A(离地面最近的点)距地面 439km，远地点 B 距地面 2384km. 并且 F2、A、B 在同一直线上，地球半径约为 6371km，求卫星运行的轨道方程（精确到 1km).



解： 以直线 AB 为 x 轴，线段 AB 的中垂线为 y 轴建立如图所示的直角坐标系，AB 与地球交与 C,D 两点.

设所求的方程为$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\left(a>b>0\right)$,

由题意知：|AC|=439, |BD|=2384,

$|F_2C|=|F_2D|=6371$.

则:$a-c=|OA|-|OF_2|=|F_2A|=6371+439=6810$,

$a+c=|OB|+|OF_2|=|F_2B|=6371+2384=8755$.

解得$a=7782.5, c=972.5$，$\therefore b\approx 7722$.

故卫星的轨道方程为约 $\frac{x^2}{7783^2}+\frac{y^2}{7722^2}=1$.

由此，借助定理 2 计算得到该人造地球卫星的轨道周长 L 满足 $48710.58258km \approx (<) L (<) \approx 48710.58258km$，由此有 $L \approx 48710.58258km$. 可见定理 2 的精确度很高.

有兴趣的读者，还可以借助定理 2 研究人类已发现的各种彗星（见文[12]）的轨道周长.

5．课题研究展望

本文提供了一种探索 Toader 平均的方法，也给出了一对十分简洁而又较为精确的上下界，也就是

$$\frac{2883}{2048}A(a,b)-\frac{579}{2048}H(a,b)-\frac{61}{2048}G(a,b)-\frac{195}{2048}S(a,b)$$

$$\le T(a,b)$$

$$\le \frac{43}{32}A(a,b)-\frac{7}{32}H(a,b)-\frac{3}{32}G(a,b)-\frac{1}{32}S(a,b)$$

这种以 a，b 的平方平均、算术平均、几何平均、调和平均来逼近 Toader 平均的方式或许能够应用在求其他不能用初等函数表示的平均之中，甚至也可以扩展至与 $a_1,a_2,a_3,...,a_n$ 有关的更高阶的 Toader 平均 $T(a_1,a_2,a_3,...,a_n)$. 也可以对 a、b 进行加权，求得其四个加权平均数，再用同样的方法来逼求 $T(a,b)$.

本文采用的四种平均值逼求的 $T(a,b)$ 的方法仍存在一些不足. 如上文所提到的，某些公式的泰勒展开项系数比 $T(a,b)$ 小，但是在其中一个变量取到较小值的时候却大于 $T(a,b)$，由此导致了下界的强度不如上界，这个问题是这种方法缺陷的一部分. 但是瑕不掩瑜，本文得到的简洁的上下界依旧有极高的价值，由此可以衍生出一系列的不等式，可以与伽马函数等高等函数相结合，可以求出椭圆的周长并结合开普勒天文定律求天体轨迹周长……本文的成果还有诸多应用，限于篇幅，不再赘述.

6．参考文献

[1]Abramowitz M and stegun I A, editors . Handbook of Mathematical Functions with Formu1as , Graphs and Mathematical Tables. New York: Dover, 1965

[2] Gh. Toader, *Some mean values related to the arithmetic-geometric mean*, J. Math. Anal. Appl. **218** (1998), no.~2, 358—368.

[3]匡继昌.常用不等式（第四版）[M].济南：山东科学技术出版社，2010：61

[4] Y. Hua and F. Qi, *The best bounds for Toader mean in terms of the centroidal and arithmetic means,* http://arxiv.org/abs/1303.2451.

[5] W.-H. Li and M.-M. Zheng, *Some inequalities for bounding Toader mean*, J. Funct. Spaces Appl. **2013** (2013), Article ID 394194, 5 pages; Available online at http://dx.doi.org/10.1155/2013/394194

[6]柴慧铮．项明达数学思想述评，《自然科学史研究》第 11 卷，第 2 期，1996

[7]周祖逵．椭圆周长近似公式，《数学通报》1995 年，第 6 期

[8]周祖逵．再谈椭圆周长近似公式，《数学通报》1996 年，第 12 期

[9]李明，张小明．线性核 Toader 平均的 Schur 凸性和 Schur 几何凸性，见《第六届全国不等式学术会议论文汇编》，内蒙古民族大学，2013．7．

[10]周钰承．世界上精度最高的椭圆周长初等公式，
http://wenku.baidu.com/view/e43b7b44852458fb770b56ff.html

[11]高中数学人教 A 版选修 2-1，人民教育出版社，2009 年 6 月第 4 次印刷

[12]哈雷彗星的运转周期是多少？http://wenda.tianya.cn/question/09f7c1e62146f040